Istituzioni di Matematiche
CdL scienze Biologiche

Integrazione di funzioni fratte:

Siano $P(x)$ e $Q(x)$ due polinomi:

$$\text{grado } P(x) = n$$
$$\text{grado } Q(x) = m$$

Passo 1 Se $n \geq m$ allora effettuare Divisione Euclidea:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = A(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

dove $A(x)$ e $R(x)$ sono polinomi con $\text{grado } R < \text{grado } Q$

$$\Rightarrow \int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \underbrace{\int A(x)\,dx}_{\text{Facile}} + \underbrace{\int \frac{R(x)}{Q(x)}\,dx}_{\text{fratto}}$$

Passo 2 Svolgo $\displaystyle\int \frac{R(x)}{Q(x)}\,dx$:

Decomporre il denominatore attraverso il teorema

Decomporre il denominatore attraverso il teorema Gauss (Ogni polinomio si può sempre decomporre nel prodotto o di di 1° grado oppure 2° grado irriducibile, con rispettive molteplicità)

$$\boxed{Q(x) = q_0 \, (x-\alpha_1)^{p_1} \cdots (x-\alpha_h)^{p_h} \cdot (x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{s_1} \cdots (x^2+\beta_k x+\gamma_k)^{s_k}}$$

Passo 3 Ricerca delle costanti :

si prova che è sempre possibile trovare le costanti tali che

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{1}{q_0} \frac{R(x)}{(x-\alpha_1)^{p_1} \cdots (x^2+\beta_k x+\gamma_k)^{s_k}}$$

$$= \frac{1}{q_0}\left[\left(\frac{A_{11}}{(x-\alpha_1)} + \cdots + \frac{A_{1p_1}}{(x-\alpha_1)^{p_1}}\right) + \cdots + \left(\frac{A_{h1}}{(x-\alpha_h)} + \cdots + \frac{A_{hp_h}}{(x-\alpha_h)^{p_h}}\right)\right.$$

$$+ \left(\frac{B_{11}x + C_{11}}{x^2+\beta_1 x+\gamma_1} + \cdots + \frac{B_{1s_1}x + C_{1s_1}}{(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{s_1}}\right) + \cdots$$

$$\left.\cdots + \left(\frac{B_{k1}x + C_{k1}}{x^2+\beta_k x+\gamma_k} + \cdots + \frac{B_{ks_k}x + C_{ks_k}}{(x^2+\beta_k x+\gamma_k)^{s_k}}\right)\right]$$

Passo 4 Conclusione

$$\int \frac{R(x)}{Q(x)}\,dx = \frac{1}{q_0}\Bigg[\left(A_{11}\int \frac{1}{x-\alpha_1} + \dots + A_{1p_1}\int \frac{1}{(x-\alpha_1)^{p_1}}\,dx\right)$$

$$+ \dots + \left(\int \frac{B_{k1}x + C_{k1}}{x^2+\beta_k x+\gamma_k}\,dx + \dots \int \frac{B_{ks_k}x + C_{ks_k}}{(x^2+\beta_k x+\gamma_k)^{s_k}}\right)\Bigg]$$

dove l'integrale di ciascun addendo coincide con gli integrali particolari che abbiamo già trattato.

Esercizio (1 Aprile 2026)

$$\int \frac{5x+1}{x^2+x-6}\,dx$$

Passo 2 Decompongo denominatore

$$\Delta = 1+24 = 5^2 \qquad x_{1,2} = \frac{-1\pm 5}{2} \begin{cases} -3 \\ 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad x^2+x-6 = (x-(-3))\cdot(x-2) = (x+3)(x-2)$$

Passo 3 Ricerca delle costanti

$$\frac{5x+1}{x^2+x-6} = \frac{A}{(x+3)} + \frac{B}{(x-2)} =$$

$x + x - 6 \qquad (x+3) \qquad (x-2)$

$$= \frac{A(x-2) + B(x+3)}{(x+3)(x-2)} =$$

$$= \frac{(A+B)x + (-2A+3B)}{x^2+x-6}$$

Da cui $5x + 1 = (A+B)x + (-2A+3B)$

Dal principio di identità tra polinomi, si ha

$$\begin{cases} A+B = 5 \longrightarrow B = 5 - A \\ -2A+3B = 1 \end{cases}$$

$\xrightarrow{2^{a}} -2A + 3(5-A) = 1$

$\longrightarrow -5A = -14$

$\Longrightarrow B = 5 - \frac{14}{5} = \frac{11}{5} \qquad A = \frac{14}{5}$

Passo 4 Sostituisco le costanti

$$\int \frac{5x+1}{x^2+x-6}\,dx = \frac{14}{5}\int \frac{1}{x+3}\,dx + \frac{11}{5}\int \frac{1}{x-2}\,dx$$

$$= \frac{14}{5}\lg|x+3| + \frac{11}{5}\lg|x-2| + \underline{\underline{cost}}$$

Esercizio $\int \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} dx$

Passo 3 Ricerca delle costanti

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+2)} + \frac{C}{(x+3)}$$

$$= \frac{A(x+2)(x+3) + B(x+1)(x+3) + C(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

$$= \frac{(A+B+C)x^2 + (5A+4B+3C)x + (6A+3B+2C)}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

Da cui

$$0x^2 + 0x + 1 = (A+B+C)x^2 + (5A+4B+3C)x + (6A+3B+2C)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B+C=0 \\ 5A+4B+3C=0 \\ 6A+3B+2C=1 \end{cases}$$

$\rightarrow C = -A-B$

2ª $5A+4B+3(-A-B)=0$

$2A+B=0 \rightarrow B=-2A \rightarrow C = -A-(-2A) = A$

$= A$

$3^a \quad \cancel{6A} + 3(\cancel{-2A}) + 2(A) = 1$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{1}{2} \quad B = -1 \quad C = \frac{1}{2}$$

Passo 4 Sostituisco i 3 numeri al Passo 3

$$\int \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}}{x+1}\,dx + \int \frac{(-1)}{x+2}\,dx + \int \frac{\frac{1}{2}}{x+3}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx - \int \frac{1}{x+2}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+3}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\lg|x+1| - \lg|x+2| + \frac{1}{2}\lg|x+3| + \text{cost}$$

Esercizio $\displaystyle\int \frac{x^4+9}{x^2-5x+6}\,dx$

Passo 1 Divisione Euclidea

$$\begin{array}{l|l} x^4 + 9 & x^2-5x+6 \\ \hline x^4-5x^3+6x^2 & \underbrace{x^2+5x+19}_{A(x)} \\ \hline 5x^3-6x^2+9 & \\ 5x^3-25x^2+30x & \\ \hline 19x^2-30x+9 & \end{array}$$

(sottraggo)

$\frac{5x^{\cancel{3}}}{\cancel{x^2}} = 5x$

$\frac{19\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} = 19$

$$19x^2 - 30x + 9$$

$$19x^2 - 95x + 114$$

$$\underbrace{65x - 105}_{R(x)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{x^4+9}{x^2-5x+6} = (x^2+5x+19) + \frac{65x-105}{x^2-5x+6}}$$

$$\Rightarrow \int \frac{x^4+9}{x^2-5x+6}\,dx = \int (x^2+5x+19)\,dx + \int \frac{65x-105}{x^2-5x+6}\,dx$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} + 5\frac{x^2}{2} + 19x\right) + \int \frac{65x-105}{x^2-5x+6}\,dx$$

A parte svolgo

$$\int \frac{65x-105}{x^2-5x+6}\,dx$$

Passo 2 Decomposizione denominatore

$$\Delta = 25 - 24 = 1 \qquad x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2} \begin{cases} 2 \\ 3 \end{cases}$$

$$\frac{65x-105}{x^2-5x+6} = \frac{65x-105}{(x-2)(x-3)}$$

Passo 3 Ricerca costanti

$$\frac{65x - 105}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{} = \frac{A(x-3) + B(x-2)}{(x-2)(x-3)} = \frac{(A+B)x + (-3A-2B)}{(x-2)(x-3)}$$

Da cui (PIP)

$$\begin{cases} A+B = 65 \\ -3A-2B = -105 \end{cases} \rightarrow B = 65 - A$$

2ª

$$-3A - 2(65-A) = -105$$

$$-A - 130 = -105$$

$$-A = 130 - 105 = 25$$

$$\Rightarrow A = -25$$

$$B = 65 - A = 65 + 25 = 90$$

Passo Sostituisco le costanti ricavate nel Passo 3

$$\int \frac{65x - 105}{x^2 - 5x + 6}\,dx = -25\int \frac{1}{x-3}\,dx + 90\int \frac{1}{x-2}\,dx$$

$$= -25 \lg|x-3| + 90 \lg|x-2| + \text{cost}$$

Concludo :

$$\int \frac{x^4+9}{x^2-5x+6}\,dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{5}{2}x^2 + 19x\right) - 25\lg|x-3| + 90\lg|x-2| + \text{cost}$$

Teorema (2° sostituzione)

Sia $f:(c,d) \to (a,b)$ derivabile e invertibile

$g:(a,b) \to \mathbb{R}$ ammette primitive

$$\Longrightarrow \boxed{\int g(x)\,dx = \left[\int g(f(t))\cdot f'(t)\,dt\right]_{t=f^{-1}(x)}}$$

Commento : mentre il 1° teorema di sostituzione non è sempre utilizzabile poichè vogliamo una funzione integranda del tipo $g(f(x))\cdot f'(x)$, il 2° teorema di sostituzione è sempre utilizzabile, purchè si scelga una opportuna funzione $f(t)$ che ci permette di semplificare blocchi dentro la funzione $g(x)$

Dim Per provare un'uguaglianza integrale, utilizziamo il principio della doppia inclusione

P $\int g(x)\,dx \subseteq \left[\int g(f(t))\cdot f'(t)\,dt\right]$

Prima: $\displaystyle\int g(x)\,dx \subseteq \left.\int g(f(t))\cdot f'(t)\,dt\,\right]_{t=f^{-1}(x)}$

Sia $G \in \int g(x)\,dx$ $\quad (G' = g)$

Ma $G(x) = G(f(f^{-1}(x)))$

$= G(f(t))$ $\quad \boxed{t = f^{-1}(x)}$

$$(G(x))' = (G(f(t)))' =$$

$$= G'(f(t))\cdot f'(t) =$$

$$= g(f(t))\cdot f'(t)$$

$$\Rightarrow G \in \left.\int g(f(t))\cdot f'(t)\,dt\,\right]_{t=f^{-1}(x)}$$

L'altra inclusione è gratis:

sia $\boxed{H \in \left.\int g(f(t))\cdot f'(t)\,dt\,\right]_{t=f^{-1}(x)}}$

Dalla 1ª inclusione sappiamo già che ogni $G \in \int g(x)\,dx$

$$\Rightarrow \boxed{G \in \left.\int g(f(t))\cdot f'(t)\,dt\,\right]_{t=f^{-1}(x)}}$$

$$\Rightarrow \exists\, c \in \mathbb{R} : H(x) = G(x) + c \in \int g(x)\,dx$$

Suggerimenti sulla scelta della Funzione $F(t)$ per applicare il 2° sostituzione

1. $\int R(e^x)\,dx$

usare il 2° sost. con $\boxed{F(t) = \lg t}$

$\iff t = e^x$

$$\Rightarrow \int R(e^x)\,dx \overset{2^\circ \text{ sost}}{=} \int R(t) \cdot \frac{1}{t}\,dt \Big]_{t=e^x}$$

<u>Esempio</u> $\int \frac{1}{e^x - 1}\,dx$

Sia $F(t) = \lg t \iff F^{-1}(x) = \underline{e^x = t}$

$$\int g(x)\,dx = \int g(f(t)) \cdot f'(t)\,dt \Big]_{t=e^x}$$

$g(x) = \frac{1}{e^x - 1}$

$$g(f(t)) \cdot f'(t) =$$

$$= \frac{1}{e^{F(t)} - 1} \cdot \frac{1}{t} =$$

$$= \frac{1}{lt} \cdot \frac{1}{t} = \frac{1}{(t-1) \cdot t}$$

$$= \frac{1}{\underbrace{e^{\lg t}}_{t} - 1} \cdot \frac{1}{t} = \frac{1}{(t-1)\cdot t}$$

2° sost $\Longrightarrow$ $$\int \frac{1}{e^x-1}\,dx = \int \frac{1}{(t-1)\,t}\,dt \Big]_{t=e^x}$$

Passo 3 Ricerca costanti

$$\frac{0t+1}{(t-1)\cdot t} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t}$$

$$= \frac{At + B(t-1)}{(t-1)\cdot t} = \frac{(A+B)t - B}{(t-1)\cdot t}$$

$$\begin{cases} A+B = 0 \\ -B = 1 \end{cases} \rightarrow \quad A = 1, \quad B = -1$$

Passo 4 sostituisco i numeri A e B al passo 3

$$\int \frac{1}{(t-1)\,t}\,dt = \int \frac{1}{t-1}\,dt - \int \frac{1}{t}\,dt =$$

$$(t = e^x) \qquad = \lg|t-1| - \lg|t| + \text{cost}$$

$$= \lg|e^x-1| - x + \text{cost}$$

Esercizio

$$\int \frac{x-3}{x^4+x^2}\,dx$$

Passo 2 Decomp denom.

$$x^4+x^2 = x^2\cdot(x^2+1)$$

1° grado
cont. 2 volte

2° grado
irriducibile

Passo 3 Ricerca costanti

rel. a x^2

$$\frac{x-3}{x^4+x^2} = \frac{x-3}{x^2(x^2+1)} = \left[\left(\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}\right)+\frac{Cx+D}{x^2+1}\right]$$

rel a (x^2+1)

$$= \frac{A\cdot x(x^2+1)+B(x^2+1)+(Cx+D)\cdot x^2}{x^2(x^2+1)}$$

$$= \frac{(A+C)x^3+(B+D)x^2+(A)x+(B)}{x^2(x^2+1)}$$

Da cui

$$0x-3 = (A+C)x^3+(B+D)x^2+Ax+B$$

$$0x\,(-3) = (A+C)x + (B+D)x + Ax + B$$

$$\begin{cases} A+C = 0 \\ B+D = 0 \\ A = 1 \\ B = -3 \end{cases} \qquad \begin{aligned} A &= 1 \\ B &= -3 \\ C &= -1 \\ D &= 3 \end{aligned}$$

Passo 4 sostituisco tali numeri al passo 3

$$\int \frac{x-3}{x^4+x^2}\,dx = 1\cdot\int \frac{1}{x}\,dx + (-3)\underbrace{\int \frac{1}{x^2}}_{-\frac{1}{x}} + \int \frac{(-1)x+3}{x^2+1}\,dx$$

$$= \log|x| + \frac{3}{x} + \int \frac{-x+3}{x^2+1}\,dx$$

A parte

$$\int \frac{-x+3}{x^2+1}\,dx =$$ (prima riscrivo il numeratore come derivata del denominatore)

$$= -\int \frac{x-3}{x^2+1}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{2x-6}{x^2+1} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\underbrace{\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx}_{1^\circ\text{ sost}} - 6\int \frac{1}{x^2+1}\,dx\right]$$

$$\left[\int \frac{1}{t}\,dt\right] \qquad (\arctan x\,]$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\left.\int \frac{1}{t}\,dt\right]_{t=x^2+1} - 6\,\mathrm{arctg}\,x\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\lg(x^2+1) - 6\,\mathrm{arctg}\,x\right) + \mathrm{cost}$$